POLÍTICA FISCAL, ESTABILIZACIÓN DE PRECIOS Y MERCADOS INCOMPLETOS

Francisco Venegas Martínez*

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Resumen: Se presenta un modelo estocástico de estabilización temporal de precios en donde el tipo de cambio actúa como ancla nominal de la tasa de inflación. El modelo presenta credibilidad imperfecta y reconoce, explícitamente, la incertidumbre tanto en la dinámica del tipo de cambio como en el comportamiento esperado de la política fiscal. Se supone que el tipo de cambio es conducido por una mezcla de procesos estocásticos, específicamente, un proceso de difusión y uno de saltos. Asimismo, se supone que la tasa impositiva sobre la riqueza sigue un movimiento geométrico browniano. Bajo tal esquema, se supone que no existe un mercado de productos derivados para cubrirse contra una devaluación futura, de esta manera los mercados financieros son incompletos. También se examinan las decisiones de consumo y portafolio de un consumidor representativo en el equilibrio, cuando se instrumenta el plan de estabilización y la política fiscal es incierta. Por último, se evahían los efectos de choques exógenos, tanto de la política cambiaría como de la fiscal, sobre el bienestar económico.

Abstract: This paper develops a stochastic model of temporary stabilization of prices with the exchange rate acting as a nominal anchor of inflation. The model presents imperfect credibility, and explicitly recognizes the uncertainty in the dynamics of the exchange rate and in the expected behavior of fiscal policy. It is assumed that a mixed diffusion-jump stochastic process drives the exchange rate. Also, the model supposes that the tax rate on wealth follows a geometric Brownian motion. Under this framework, it is assumed that a derivatives market to hedge against future devaluation does not exist, that is, financial markets are incomplete. Consumption and portfolio decisions of a representative consumer, in equilibrium, are examined when the stabilization plan is implemented and fiscal policy is uncertain. Finally, the effects of exogenous shocks in the exchange-rate policy and economic welfare are assessed.

Clasificación JEL: F31, F41, H31

Palabras clave: política fiscal, estabilización temporal y modelación estocástica.

Fecha de recepción: 16 I 2004 *Fecha de aceptación: 11 X 2004*

* Director del Centro de Investigación en Finanzas, fvenegas@itesm.mx

1. Introducción

El impacto que la política fiscal tiene en los programas de estabilización inflacionaria, cuando el tipo de cambio se utiliza como ancla nominal, ha sido durante mucho tiempo un tema central para los diseñadores de política económica. Sin embargo, la gran mayoría de la literatura sobre esta preocupación utiliza esquemas deterministas, sin considerar factores de riesgo. En el modelo propuesto se supone que los agentes tienen expectativas de devaluación conducidas por un proceso combinado de difusión con saltos. En dicho contexto, los pequeños movimientos del tipo de cambio, que están siempre presentes, se modelan con un movimiento browniano y una devaluación extrema y repentina, que ocasionalmente ocurre, se modela con un proceso de Poisson.

La mezcla de un proceso de difusión con uno de saltos proporciona colas pesadas y sesgo en la distribución del tipo de cambio, lo que permite producir dinámicas de inflación que no pueden ser generadas utilizando únicamente el movimiento browniano. Este hecho, no sólo es una sofisticación teórica, sino un aspecto relevante que incorpora mayor realismo en el modelado de estabilización temporal. El modelo supone que no existen activos contingentes (productos derivados) en el mercado para cubrirse contra una devaluación futura. En un ambiente estocástico, aún más rico, se supone una tasa impositiva incierta sobre la riqueza. En particular, la tasa impositiva de la riqueza sigue un movimiento geométrico browniano. En contraste con los modelos deterministas de estabilización temporal, la presencia de incertidumbre en la política fiscal puede conducir a cambios cuantitativos y cualitativos significativos en las variables relevantes.

En esta propuesta, los impuestos recaudados, incluyendo el señoriaje (impuesto inflacionario), se gastan en compras improductivas del gobierno. Bajo el supuesto de agentes adversos al riesgo, se examina la dinámica de equilibrio del consumo y la riqueza cuando un programa de estabilización se pone en marcha y la política fiscal es incierta. En tal contexto, también se discuten varios temas específicos de política económica. Por ejemplo, se estudian los efectos sobre el consumo y el bienestar económico de cambios permanentes en los parámetros que determinan las expectativas, a saber: la tasa media esperada de devaluación, la volatilidad instantánea del tipo de cambio, la probabilidad de una posible devaluación, el tamaño medio esperado de una posible devaluación, el impuesto medio esperado *ad valorem* al consumo y el impuesto medio esperado sobre la riqueza.

Los programas de estabilización de la inflación que se llevaron a cabo en Argentina, Brasil, Chile, Uruguay, Israel y México entre las décadas de los setenta y los noventa han sido ampliamente documentados.[1] Existe una extensa literatura que estudia una serie de regularidades empíricas asociadas a dichos programas, ver, por ejemplo, Helpman y Razin (1987), Kiguel y Liviatan (1992) y Végh (1992). Existe también un número creciente de modelos que proporcionan explicaciones de dichas regularidades empíricas. Modelos que pueden ser clasificados en varias categorías, a saber: falta de credibilidad (Calvo, 1986; Calvo y Végh, 1993 y Reinhart y Végh 1993 y 1995); inercia inflacionaria (Rodríguez, 1982 y Calvo y Végh, 1994); efectos por el lado de la oferta (Roldos, 1995; Uribe, 1997; Lahiri, 2001 y Rebelo y Végh, 1995) y bienes duraderos (Matsuyama, 1991 y de Gregorio, Guidotti y Végh 1998).

Aunque la incertidumbre es un elemento clave cuando un programa de estabilización temporal de precios es instrumentado, existen pocos estudios bajo un planteamiento estocástico. Por ejemplo, Drazen y Helpman (1988) examinan los efectos de un tipo de cambio incierto, Calvo y Drazen (1997) contemplan incertidumbre en reformas económicas, Mendoza y Uribe (1996) y (1998) modelan probabilidades exógenas y endógenas de devaluación, Venegas y González-Aréchiga (2000) y Venegas (2000a), (2000b) y (2001) estudian el papel de la incertidumbre en la dinámica del tipo de cambio y sus implicaciones cuantitativas. Todos estos modelos comparten semejanzas importantes: 1) los mercados de productos derivados son inexistentes, 2) la recaudación de impuestos no es retribuida a los agentes y 3) las variables de política económica son estocásticas.

El modelo propuesto en la presente investigación tiene varias características distintivas en el estudio de los efectos de la incertidumbre en programas de estabilización inflacionaria basados en el tipo de cambio: 1) considera todos los factores de riesgo en la dinámica del tipo de cambio, proporcionando un ambiente estocástico más realista; 2) obtiene soluciones analíticas, haciendo más fácil la comprensión de los temas centrales en el análisis de estabilización temporal y 3) examina los efectos sobre planes de estabilización temporal de un impuesto incierto sobre la riqueza.

El trabajo se ha organizado de la siguiente manera. En la sección dos se desarrolla el marco teórico de un modelo estocástico del tipo de Ramsey para una economía pequeña y abierta que consume un solo bien y tiene una restricción *cash-in-advance*. Los agentes tienen expectativas de devaluación conducidas por un proceso combinado de difusión con saltos y pagan impuestos sobre la riqueza de acuerdo

[1] Se remite al lector a las referencias contenidas en Calvo y Végh (1999).

con un movimiento geométrico browniano. En la tres se resuelve el problema de decisión del consumidor, en la cuatro se realizan experimentos de estática comparativa. En la sección cinco se examinan las implicaciones de la estabilización temporal en el bienestar económico, en la seis se estudia el comportamiento dinámico de la riqueza y del consumo y se tratan varios temas de política cambiaria. En la última sección se presentan conclusiones y limitaciones del trabajo, y se establece la agenda para investigación futura. Dos apéndices contienen algunos detalles técnicos del problema del consumidor.

2. Marco teórico del modelo

Con el propósito de obtener soluciones analíticas en un modelo estocástico del tipo de Ramsey se mantendrá la estructura de la economía, tan simple como sea posible. Algunos de los principales supuestos del modelo se establecen, de tal manera, que los aspectos relevantes de la estabilización temporal sean más fáciles de comprender.

2.1. *Dinámica del nivel de precios*

Se considera una economía pequeña y abierta con agentes idénticos de vida infinita. La economía produce y consume un solo bien perecedero. Se supone que el bien es comerciable internacionalmente y el nivel general de precios domésticos, P_t, es determinado por la condición de poder de paridad de compra, a saber, $P_t = P_t^* e_t$, donde P_t^* es el precio en moneda extranjera del bien en el resto del mundo y e_t el tipo de cambio nominal. Se supone, por simplicidad, que P_t^* es igual a 1. También se supone que el valor inicial del tipo de cambio, e_0, es conocido e igual a 1.

Se supone que el número de devaluaciones esperadas, i.e., los saltos en el tipo de cambio, por unidad de tiempo, siguen un proceso de Poisson N_t con intensidad λ, de tal manera que

$$\begin{aligned} \mathrm{IP}^{(N)}\ \{\text{un salto unitario durante } \mathrm{d}t\} &= \mathrm{IP}^{(N)}\{\mathrm{d}N_t = 1\} \\ &= \lambda \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t), \qquad (1) \end{aligned}$$

mientras que

$$\mathrm{IP}^{(N)}\{\text{ningn salto en } \mathrm{d}t\} = \mathrm{IP}^{(N)}\{\mathrm{d}N_t = 0\}$$

$$= 1 - \lambda \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t). \tag{2}$$

Así, $\mathrm{E}^{(N)}[\mathrm{d}N_t] = \mathrm{Var}^{(N)}[\mathrm{d}N_t] = \lambda \mathrm{d}t$. El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $N_0 = 0$.

Considérese un proceso de Wiener $(Z_t)_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad fijo con su filtración aumentada

$$(\Omega^{(Z)}, \mathcal{F}^{(Z)}, (\mathcal{F}_t^{(Z)})_{t\geq 0}, \mathbb{P}^{(Z)}).$$

Se supone que el consumidor percibe que la tasa de inflación esperada, $\mathrm{d}P_t/P_t$ y, por lo tanto, la tasa esperada de devaluación, $\mathrm{d}e_t/e_t$, sigue un movimiento geométrico browniano con saltos de Poisson descrito por

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \frac{\mathrm{d}e_t}{e_t} = \pi \mathrm{d}t + \sigma_P \mathrm{d}Z_t + \eta \mathrm{d}N_t, \tag{3}$$

donde π es la tasa media esperada de devaluación condicionada a que no se presenten saltos, σ_P la volatilidad instantánea del nivel general de precios y η el tamaño medio esperado de un salto en el tipo de cambio. El proceso Z_t se supone independiente de N_t. En lo que se sigue, π, σ_P, λ y η son constantes positivas.

2.2. *Saldos monetarios reales*

El agente mantiene saldos monetarios reales, $m_t = M_t/P_t$, donde M_t es el acervo nominal de dinero. La tasa de retorno estocástica por la tenencia de saldos reales, $\mathrm{d}R_m$, está dada por el cambio porcentual en el precio del dinero, en términos de bienes. Al aplicar el lema de Itô para procesos de difusión con saltos al inverso del nivel de precios, con (3) como el proceso subyacente (ver apéndice A, fórmula (A.2)), se obtiene

$$\mathrm{d}R_m = \mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right) \Big/ \left(\frac{M_t}{P_t}\right) = (-\pi + \sigma_P^2)\mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}Z_t - \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)\mathrm{d}N_t. \tag{4}$$

2.3. *Bonos internacionales*

El agente también tiene acceso a un bono internacional, b_t, que paga una tasa de interés real libre de riesgo, r, constante para todos los plazos. En este caso, se satisface

$$
\mathrm{d}b_t = rb_t\mathrm{d}t, \qquad b_0 \;\text{ dado.} \tag{5}
$$

Es decir, el bono paga r unidades del bien de consumo por unidad de tiempo. Los agentes toman r como dada. La ecuación (5) se puede interpretar como una cuenta bancaria en la que se realiza un depósito inicial con valor b_0 al tiempo cero y que gana a una tasa instantánea libre de riesgo, r, en cada instante t.

2.4. *Impuestos sobre la riqueza*

Se considera ahora un proceso de Wiener $(U_t)_{t\geq 0}$, definido en un espacio de probabilidad fijo equipado con su filtración aumentada $(\Omega^{(U)}, \mathcal{F}^{(U)}, (\mathcal{F}_t^{(U)})_{t\geq 0}, \mathbb{P}^{(U)})$. Se supone que el consumidor representativo percibe que su riqueza es gravada a una tasa incierta, τ_t, de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$
\frac{\mathrm{d}\tau_t}{\tau_t} = \bar{\tau}\mathrm{d}t + \sigma_\tau \mathrm{d}\widetilde{Z}_t, \quad \tau_0 > 0, \tag{6}
$$

con

$$
\widetilde{Z}_t = \rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2}U_t \tag{7}
$$

y

$$
\mathrm{Cov}\big(\mathrm{d}Z_t, \mathrm{d}\big(\rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2}U_t\big)\big) = \rho \mathrm{d}t, \tag{8}
$$

donde $\bar{\tau}$ es la tasa media esperada de crecimiento del impuesto sobre la riqueza, σ_τ la volatilidad de la tasa impositiva en la riqueza y $\rho \in (-1,1)$ la correlación entre los cambios en la inflación y los cambios en los impuestos sobre la riqueza. Observe que un incremento en el tipo de cambio deprecia los saldos monetarios reales, lo que, a su vez, reduce el valor real de los activos, situación que puede llevar a la autoridad fiscal a modificar su política fiscal. Los procesos N_t, Z_t y U_t se suponen independientes por pares.

2.5. *Restricción del tipo cash-in-advance*

Considere una restricción del tipo *cash-in-advance* de la forma Clower-Lucas-Feenstra:

$$m_t = \alpha c_t, \tag{9}$$

donde c_t es el consumo y $\alpha > 0$ el tiempo que se mantiene el dinero para financiar el consumo. La condición (9) es crítica para ligar la política cambiaria con el consumo. De está forma, la devaluación actúa como un impuesto estocástico en los saldos monetarios reales.

3. Problema de decisión del consumidor

En esta sección se caracterizan las decisiones óptimas de consumo y portafolio de un agente representativo.

3.1. *Restricción presupuestal intertemporal*

La acumulación de la riqueza del consumidor en términos de las decisiones de portafolio, $w_t = m_t/a_t$, $1 - w_t = b_t/a_t$, y de consumo, c_t, está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{cases} \mathrm{d}a_t = a_t w_t \mathrm{d}R_m + a_t(1 - w_t)\mathrm{d}R_b - (\tau_t a_t + (1 + \widehat{\tau})c_t)\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}\tau_t = \bar{\tau}\tau_t \mathrm{d}t + \sigma_\tau \tau_t\big(\rho \mathrm{d}Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}\mathrm{d}U_t\big), \quad \tau_0 > 0, \end{cases} \tag{10}$$

donde $\mathrm{d}R_b = \mathrm{d}b_t/b_t$ y $\widehat{\tau}$ es una tasa impositiva *ad valorem* al consumo. Si se sustituyen la ecuaciones (4), (5) y (9) en la primera ecuación del sistema (10), se tiene que

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[(r - \beta w_t - \tau_t)\,\mathrm{d}t - w_t\sigma_P \mathrm{d}Z_t - w_t\Big(\frac{\eta}{1 + \eta}\Big)\mathrm{d}N_t\right], \tag{11}$$

donde $\beta = (1 + \widehat{\tau})\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2$.

3.2. *Índice de satisfacción*

La función de utilidad del tipo von Neumann-Morgenstern al tiempo t, V_t, del consumidor competitivo y adverso al riesgo está dada por

$$V_t = \mathrm{E}\left\{ \int_t^{\infty} \log(c_s)\ e^{-rs} \mathrm{d}s \ \Big|\ \mathcal{F}_t \right\}, \tag{12}$$

donde $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(Z)} \otimes \mathcal{F}_t^{(U)}$ representa la información disponible en t. Observe que la tasa subjetiva de descuento del agente ha sido igualada a la tasa de interés, r, para evitar dificultades técnicas, innecesarias en la dinámica de equilibrio. Se emplea la función de utilidad logarítmica con el propósito de generar soluciones analíticas que hagan más simple el análisis posterior.

3.3. *La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman*

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema de control óptimo estocástico, en el que se maximiza la utilidad esperada del agente sujeto a su restricción presupuestal intertemporal, es:

$$\begin{aligned}
&\lambda I(a_t, \tau_t, t) - I_t(a_t, \tau_t, t) - I_\tau(a_t, \tau_t, t)\bar{\tau}\tau_t - \frac{1}{2} I_{\tau\tau}(a_t, \tau_t, t)\tau_t^2 \sigma_\tau^2 \\
&-I_a(a_t, \tau_t, t) a_t (r - \tau_t) = \max_w \Bigg\{ \log(\alpha^{-1} a_t w_t) e^{-rt} - I_a(a_t, \tau_t, t) a_t \beta w_t \\
&\qquad + \frac{1}{2} I_{aa}(a_t, \tau_t, t) a_t^2 w_t^2 \sigma_P^2 - I_{a\tau}(a_t, \tau_t, t) a_t \tau_t w_t \sigma_P \sigma_\tau \rho \\
&\qquad + \lambda I\left(a_t\left(\frac{1 + \eta(1 - w_t)}{1 + \eta}\right), \tau_t, t\right) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{13}$$

donde

$$I(a_t, \tau_t, t) = \max_w \mathrm{E}_t \left\{ \int_t^{\infty} \log\left(\alpha^{-1} a_s w_s\right) e^{-rs} \mathrm{d}s \ \Big|\ \mathcal{F}_t \right\}$$

es la función de utilidad indirecta (o función de bienestar económico) del consumidor, e $I_a(a_t, \tau_t, t)$ es la variable de coestado.

3.4. *Reducción de la dimensión del problema*

Dado el factor de descuento exponencial en la utilidad indirecta, se define $I(a_t, \tau_t, t)$ en forma separable en el tiempo como

$$I(a_t, \tau_t, t) \equiv F(a_t, \tau_t)e^{-rt}. \tag{14}$$

Por lo tanto, la ecuación (13) se transforma en

$$(\lambda+r)F(a_t,\tau_t)-F_\tau(a_t,\tau_t)\bar{\tau}\tau_t-\frac{1}{2}F_{\tau\tau}(a_t,\tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2-F_a(a_t,\tau_t)a_t\,(r-\tau_t)$$

$$=\max_w\left\{\log(\alpha^{-1}a_tw_t)-F_a(a_t,\tau_t)a_t\beta w_t+\frac{1}{2}F_{aa}(a_t,\tau_t)a_t^2w_t^2\sigma_P^2\right.$$

$$\left.-F_{a\tau}(a_t,\tau_t)a_t\tau_tw_t\sigma_P\sigma_\tau\rho+\lambda F\left(a_t\left(\frac{1+\eta(1-w_t)}{1+\eta}\right),\tau_t\right)\right\}. \tag{15}$$

Se postula como posible candidato de solución de (15)

$$F(a_t,\tau_t)=\delta_0+\delta_1\log\left(\frac{a_t}{\tau_t}\right)+H(\tau_t;\delta_2,\delta_3), \tag{16}$$

donde δ_0, δ_1 y $H(\tau_t)$ se tienen que determinar de la ecuación (15). Al sustituir la ecuación (16) en (15), se obtiene

$$r\left(\delta_0+\delta_1\log\left(a_t\right)\right)+\delta_1\left(\bar{\tau}-r-\frac{1}{2}\sigma_\tau^2\right)+rH(\tau_t)-H'(\tau_t)\tau_t\bar{\tau}$$

$$-\frac{1}{2}H''(\tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2-r\delta_1\log(\tau_t)+\delta_1\tau_t=\max_w\left\{\log(\alpha^{-1}a_tw_t)-\delta_1\beta w_t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\delta_1w_t^2\sigma_P^2+\lambda\delta_1\log\left(\frac{1+\eta(1-w_t)}{1+\eta}\right)\right\}. \tag{17}$$

3.5. *Condiciones de primer orden y determinación de coeficientes*

Las condiciones de primer orden del problema de optimización intertemporal del agente representativo conducen a una proporción de riqueza asignada a la tenencia de saldos reales invariante en el tiempo, $w_t \equiv w$, así como a la relación

$$\frac{1}{\delta_1 w} - \frac{\lambda\eta}{1+\eta(1-w)} = (1+\widehat{\tau})\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2 + w\sigma_P^2. \tag{18}$$

Ahora se tiene que determinar $H(\tau_t)$ como solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$rH(\tau_t) - H'(\tau_t)\tau_t\bar{\tau} - \tfrac{1}{2}H''(\tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2 - r\delta_1\log(\tau_t) + \delta_1\tau_t = 0. \tag{19}$$

Los coeficientes δ_0 y δ_1 son determinados de (15), después de sustituir el valor óptimo w^*. Así, $\delta_1 = r^{-1}$, lo que produce que el coeficiente de $\log(a_t)$ en la (17) sea cero y

$$\delta_0 = \frac{1}{r}\log(\alpha^{-1}w^*) - \frac{1}{r^2}\Bigg[((1+\widehat{\tau})\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2)w^*$$

$$+\frac{1}{2}(w^*\sigma_P)^2 + \bar{\tau} - r - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2 - \lambda\log\left(\frac{1+\eta(1-w^*)}{1+\eta}\right)\Bigg]. \tag{20}$$

El supuesto de utilidad logarítmica conduce a que w dependa, solamente, de los parámetros que determinan las características estocásticas de la economía y, por lo tanto, w es constante. Es decir, la actitud del consumidor hacia el riesgo cambiario es independiente de su riqueza, i.e., el nivel de riqueza que resulte en cualquier instante no tiene relevancia para las decisiones de portafolio. Más aún, debido a la utilidad logarítmica, el coeficiente de correlación, $\rho \in (-1,1)$, no juega papel alguno en las decisiones del consumidor. Por último, es importante señalar que la ecuación (18) es cúbica, por lo que tiene, al menos, una raíz real.

La solución de la ecuación (19) es (ver apéndice B)

$$H(\tau_t) = \delta_2\tau_t^{\gamma_1} + \delta_3\tau_t^{\gamma_2} + \frac{1}{\bar{\tau}}\log(\tau_t)$$

$$\left(1 + \frac{2}{(\sigma_\tau^2 + 2\bar{\tau})}\tau_t\right) + \frac{1}{\bar{\tau}}\left(1 - \frac{\sigma_\tau^2}{2\bar{\tau}}\right) \tag{21}$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{4r}{(2\bar{\tau} - \sigma_\tau^2) + \sqrt{(2\bar{\tau} - \sigma_\tau^2)^2 + 8r\sigma_\tau^2}}$$

y

$$\gamma_2 = \frac{4r}{(2\bar{\tau} - \sigma_\tau^2) - \sqrt{(2\bar{\tau} - \sigma_\tau^2)^2 + 8r\sigma_\tau^2}}.$$

Los coeficientes δ_2 y δ_3 se determinan, de tal manera, que $H(\tau_0) = 0$ y $H'(\tau_0) = 0$ (ver apéndice B). La primera condición inicial, $H(\tau_0) = 0$, asegura que el bienestar económico,

$$W \equiv I(a_0, \tau_0, 0) = F(a_0, \tau_0) = \delta_0 + \frac{1}{r}\log\left(\frac{a_0}{\tau_0}\right),$$

sea independiente de la selección de H. La segunda condición inicial, $H'(\tau_0) = 0$, garantiza que la función de bienestar sea decreciente respecto al impuesto a la riqueza, esto es,

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = -\frac{1}{r\tau_0} < 0,$$

y también asegura que H sea la única solución de la ecuación (19).

3.6. *Una asignación viable del portafolio*

La ecuación (18) es cúbica, con una raíz negativa y dos positivas. Esto puede verse si se intersecta la línea recta definida por el lado derecho de la ecuación (18) con la gráfica definida por su lado izquierdo. En este caso, hay solamente una intersección que proporciona un estado estacionario único de la riqueza, que el consumidor asigna a la tenencia de saldos reales $w^* \in (0, 1)$.

4. Experimentos de política económica (estática comparativa)

En esta sección, se obtienen los primeros resultados relevantes del modelo propuesto. Un aumento permanente en la tasa de devaluación da como resultado un incremento en el costo de oportunidad futuro de comprar bienes, lo cual, a su vez, conduce a una disminución permanente de la proporción de la riqueza destinada al consumo futuro. Para ver esto, se calcula la derivada de la ecuación (18) con respecto de π, lo cual conduce a

$$\frac{\partial w^*}{\partial \pi} = -\Psi^{-1} < 0, \tag{22}$$

donde

$$\Psi = \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda\eta^2}{[1+\eta(1-w^*)]^2} + \sigma_P^2\right]. \tag{23}$$

El segundo resultado es la respuesta de los saldos monetarios reales de equilibrio, w^*, a cambios permanentes en el parámetro de intensidad, λ. Un aumento en el número esperado de devaluaciones por unidad de tiempo ocasiona un incremento en el costo de oportunidad futuro de la compra de bienes. Esto, a su vez, disminuye de forma permanente la proporción de la riqueza dedicada al consumo futuro. De hecho, después de calcular la derivada de la ecuación (18) con respecto de λ se obtiene

$$\frac{\partial w^*}{\partial \lambda} = -\frac{\eta}{\Psi[1+\eta(1-w^*)]} < 0. \tag{24}$$

Un efecto equivalente se logra por un cambio en el tamaño medio esperado de un salto:

$$\frac{\partial w^*}{\partial \eta} = -\frac{\lambda}{\Psi[1+\eta(1-w^*)]^2} < 0. \tag{25}$$

Por último, un aumento en el impuesto *ad valorem* al consumo producirá una reducción permanente en la proporción de la riqueza asignada al consumo futuro, ya que

$$\frac{\partial w^*}{\partial \widehat{\tau}} = -\frac{1}{\alpha\Psi} < 0. \tag{26}$$

5. Impacto en el bienestar económico

Aquí evaluamos los impactos de choques exógenos en el bienestar económico. Como siempre, el criterio de bienestar, W, del individuo representativo es la utilidad indirecta, con una riqueza real inicial, a_0, y una tasa impositiva inicial de la riqueza, τ_0. Por lo tanto, en virtud de la ecuación (14), el bienestar está definido por:

$$W(\pi,\lambda,\eta,\bar{\tau},\widehat{\tau};a_0,\tau_0) \equiv I(a_0,\tau_0,0) = F(a_0,\tau_0) = \frac{1}{r}[1+\log(a_0/\tau_0)$$

$$+\log(\alpha^{-1}w^*)] - \frac{1}{r^2}\left[((1+\widehat{\tau})\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2)w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma_P)^2 + \bar{\tau}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_{\tau}^{2} - \lambda\log\left(\frac{1+\eta(1-w^{*})}{1+\eta}\right)\Big], \tag{27}$$

donde se ha considerado el hecho de que $H(\tau_0) = 0$.

5.1. *Impacto de cambios permanentes del tipo de cambio en el bienestar*

Ahora se calculan los impactos en el bienestar económico de cambios permanentes en la tasa media esperada de devaluación, la probabilidad de devaluación y el tamaño esperado de una devaluación. Primero, obsérvese que un incremento en la tasa media esperada de devaluación reduce el bienestar económico. En efecto, al calcular la derivada de la ecuación (27) con respecto a π tenemos que

$$\frac{\partial W}{\partial \pi} = -\frac{w^{*}}{r^{2}} < 0, \tag{28}$$

Análogamente, un choque exógeno en la probabilidad de devaluación tiene que reducir el bienestar económico. Para ver esto, es suficiente calcular la derivada de la ecuación (27) con respecto a λ

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{1}{r^{2}}\log\left(\frac{1+\eta(1-w^{*})}{1+\eta}\right) < 0, \tag{29}$$

Por último, un incremento en el tamaño esperado de una devaluación reduce el bienestar económico, ya que

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = -\frac{1}{r^{2}}\left[\frac{\lambda w^{*}}{(1+\eta)(1+\eta(1-w^{*}))}\right] < 0. \tag{30}$$

5.2. *Impacto de la política fiscal en el bienestar económico*

Ahora se calculan los impactos en el bienestar económico producidos por cambios permanentes en la tasa impositiva media esperada a la riqueza y el impuesto esperado *ad valorem* al consumo. En este caso, se tiene

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\tau}} = -\frac{1}{r^{2}} < 0, \tag{31}$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial \widehat{\tau}} = -\frac{1}{r^2}\alpha^{-1}w^* < 0. \tag{32}$$

Por lo tanto, un aumento en la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza y la tasa impositiva en el consumo llevará a una reducción en el bienestar económico.

6. Riqueza y consumo

Ahora se obtiene el proceso estocástico que genera la riqueza real del consumidor cuando se aplica la regla óptima. Después de sustituir w^* en la ecuación (11) tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a_t = a_t\Bigg[\Big(&\frac{\lambda\eta w^*}{1+\eta(1-w^*)} + (w^*\sigma_P)^2 - \tau_t\Big) \\ &\mathrm{d}t - w^*\sigma_P \mathrm{d}z_t + \Big(\frac{1+\eta(1-w^*)}{1+\eta} - 1\Big)\mathrm{d}N_t\Bigg], \end{aligned} \tag{33}$$

donde

$$\tau_t = \tau_0 \exp\left\{(\bar{\tau} - \tfrac{1}{2}\sigma_\tau^2)t + \mathcal{E}\sigma\sqrt{t}\right\}, \tag{34}$$

y $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$. La función densidad de probabilidad de τ_t, dado τ_0, satisface

$$\begin{aligned} f_{\tau_t|\tau_0}(x|\tau_0) = &\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma_\tau x} \\ &\exp\left\{-\frac{i}{2}\left(\frac{\mathrm{iog}\,(x/\tau_0) - (\bar{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2)t}{\sigma_\tau\sqrt{t}}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{35}$$

Además, se tiene

$$\mathrm{E}[\tau_t|\tau_0] = \tau_0 e^{\bar{\tau}t} \tag{36}$$

y

$$\mathrm{Var}[\tau_t|\tau_0] = \tau_0^2 e^{2\bar{\tau}t}\big(e^{\sigma_\tau^2 t} - 1\big). \tag{37}$$

La solución a la ecuación diferencial estocástica (33), condicionada por a_0, es (ver apéndice A, fórmula (A.3))

$$a_t = a_0 e^{\xi_t}, \tag{38}$$

donde [2]

$$\xi_t = \theta_t + \phi_t, \quad \theta_t | \tau_t \sim \mathcal{N}[[F(w^*) - \tau_t]t, G(w^*)t], \tag{39}$$

$$\phi_t = L(w^*) N_t, \tag{40}$$

y

$$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t). \tag{41}$$

Los componentes estacionarios de los parámetros de las distribuciones antes mencionadas son:

$$F(w^*) = \frac{\lambda \eta w^*}{1 + \eta(1 - w^*)} + \frac{(w^* \sigma_P)^2}{2},$$
$$G(w^*) = (w^* \sigma_P)^2,$$

y

$$L(w^*) = \log\Big(\frac{1 + \eta(1 - w^*)}{1 + \eta}\Big).$$

Además, observe que

$$\mathrm{E}[\xi_t | \tau_t] = [F(w^*) - \tau_t + L(w^*)\lambda]t \tag{42}$$

y

$$\mathrm{Var}[\xi_t | \tau_t] = [G(w^*) + [L(w^*)]^2 \lambda]t. \tag{43}$$

Más aún, se sigue que

$$\mathrm{E}[\xi_t] = \mathrm{E}\{\mathrm{E}[\xi_t | \tau_t]\} = [F(w^*) + \tau_0 e^{\bar{\tau} t} + L(w^*)\lambda]t, \tag{44}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[\xi_t] &= \mathrm{Var}\{\mathrm{E}[\xi_t | \tau_t]\} + \mathrm{E}\{\mathrm{Var}[\xi_t | \tau_t]\} \\ &= t^2 \tau_0^2 e^{2\bar{\tau} t}\big(e^{\sigma_t^2 t} - 1\big) + [G(w^*) + [L(w^*)]^2 \lambda]t. \end{aligned} \tag{45}$$

---

[2] $x \sim \mathcal{P}(a)$ denota una variable aleatoria de tipo Poisson x con media a.

Estas dos últimas ecuaciones, de acuerdo con (38), determinan la media y la varianza de la velocidad a la que crece la riqueza real del individuo.

6.1. *Dinámica del consumo*

En virtud de las ecuaciones (9) y (38), el proceso estocástico para el consumo se puede escribir como

$$c_t^* = \alpha^{-1} w^* a_0 e^{\xi_t}. \tag{46}$$

Lo que indica que, en ausencia de mercados de productos derivados, el riesgo de devaluación tiene un efecto en la riqueza mediante la incertidumbre en ξ_t, es decir, la incertidumbre cambia el conjunto de oportunidades que enfrenta el consumidor. Por otra parte, el riesgo de devaluación afecta de igual manera la composición del portafolio a través de sus efectos en w^*. De este modo, un cambio en la política económica estará acompañado, tanto del efecto riqueza como del de sustitución. De la ecuación (46) es posible calcular la probabilidad de que, en un intervalo de tiempo dado, ocurran ciertos niveles de consumo. Es también importante observar, al considerar las ecuaciones (12) y (46), que el supuesto de la tasa subjetiva de descuento del agente, igualada a la tasa de interés mundial, no asegura un nivel de estado estacionario en el consumo. Sin embargo, se tiene un estado estacionario de la riqueza asignada al consumo.

Se puede concluir que la incertidumbre es un elemento clave para racionalizar dinámicas del consumo más realistas, que no podrían ser obtenidas a través de modelos deterministas. Por último, en virtud de (46), las ecuaciones (44) y (45) determinan la media y la varianza de la velocidad a la que crece el consumo.

6.2. *Auges en el consumo*

Ahora se analizará una política económica de la forma:

$$\pi_t = \begin{cases} \pi_1 & \text{para } \; 0 \leq t \leq T, \\ \pi_2 & \text{para } \; t > T, \end{cases} \tag{47}$$

donde T se determina exógenamente y $\pi_1 < \pi_2$, como en Calvo (1986). Observe que hay falta de credibilidad, incluso si no se cambian los parámetros, ya que los agentes siempre asignan alguna probabilidad al evento de la devaluación. De la ecuación (46) se puede escribir

$$\lim_{\Delta\to 0^+} \frac{c^*_{T+\Delta}}{c^*_T} = \frac{w^*_2}{w^*_1}\exp\{-(\xi_t(\pi_1) - \xi_{T+\Delta}(\pi_2))\} = \frac{w^*_2}{w^*_1}.$$

El límite significa que, aunque los componentes estacionarios de la variable aleatoria ξ_t son diferentes antes y después del tiempo T, tal diferencia llega a ser tan pequeña como se desee cuando $\Delta \to 0^+$. Por lo tanto,

$$\lim_{\Delta\to 0^+} c^*_{T+\Delta} = c^*_T \frac{w^*_2}{w^*_1}. \tag{48}$$

También se observa que $w^*_2/w^*_1 < 1$, junto con la ecuación (48), implica que

$$c^*_T > \lim_{\Delta\to 0^+} c^*_{T+\Delta},$$

lo cual indica un salto (auge) en el consumo al tiempo T. Es decir, si se espera que el plan de estabilización sea temporal, entonces existe un salto en el consumo en T. Un análisis similar puede ser aplicado a cualquiera de los parámetros restantes que determinan las expectativas de devaluación, a saber λ y η.

7. Conclusiones

La investigación documentada, se ha orientado a una clase de modelos determininistas dirigidos a explicar efectos impositivos en un marco de estabilización temporal. La mayoría de los modelos existentes ignoran la incertidumbre, proporcionando justificaciones elaboradas para menospreciar factores de riesgo. Después de todo, lo que hace que los planes de estabilización sean temporales es la incertidumbre misma. Se ha presentado un modelo estocástico de estabilización basado en el tipo de cambio y con credibilidad imperfecta. Una característica importante de esta formulación es que existe falta de credibilidad, incluso si no se cambian los parámetros que determinan las expectativas de la devaluación.

Se han considerado varias formas de impuestos distorsionantes, un impuesto a la riqueza real y un impuesto *ad valorem* al consumo.

Se ha mostrado que una política fiscal incierta puede conducir a cambios cuantitativos significativos, en contraste con el marco determinista. La consideración de los impuestos permite analizar dinámicas transicionales más complejas, pero los resultados fueron ciertamente más ricos. En esta propuesta, la incertidumbre ha sido la clave para racionalizar dinámicas de consumo más realistas en el estudio de la estabilización temporal.

Por último, es importante mencionar que el trabajo desarrollado requiere, en una etapa posterior, de una calibración o simulación con el fin de replicar algunas de las regularidades empíricas observadas en los episodios de estabilización inflacionaria.

Bibliografía

Calvo, G. A. (1986). Temporary stabilization: Predetermined exchange rates, *Journal of Political Economy*, 94, 1319-1329.

—— y A. Drazen (1997). Uncertain duration of reform: Dynamic implications, *Macroeconomic Dynamics*, 2, 443-455.

Calvo, G. A. y E. G. Mendoza (1996a). Mexico's balance of payments crisis: A chronicle of a death foretold, *Journal of International Economics*, 41, 235-264.

—— (1996b). Petty crime and cruel punishment: Lessons from the Mexican debacle, *American Economic Review*, 86, 170-175.

Calvo, G. A. y C. A. Végh (1999). Inflation stabilization and balance-of-payments crises in developing countries, en J. Taylor and M. Woodford (comps.), *Handbook of macroeconomics*, North Holland, vol. 1C, parte 7, cap. 24.

—— (1994). Stabilization dynamics and backward-looking contracts, *Journal of Development Economics*, 43, 59-84.

—— (1993). Exchange rate based stabilization under imperfect credibility, en H. Frisch and A. Worgotter (comps.) *Open economy macroeconomics*, MacMillan, Londres, 3-28.

Drazen, A. y E. Helpman (1988). Stabilization with exchange rate management under uncertainty, en E. Helpman, A. Razin y E. Sadka (comps.), *Economic effects of the government budget*, MIT Press, Cambridge.

Gregorio, J. de, P. E. Guidotti y C. A. Végh (1998). Inflation stabilization and the consumption of durable goods, *Economic Journal*, 108, 105-131.

Gihman, I. y A. V. Skorohod (1972). *Stochastic differential equations*, Springer-Verlag, Berlin.

Helpman, E. y A. Razin (1987). Exchange rate management: Intertemporal trade-offs, *American Economic Review*, 77, 107-123.

Kiguel, M. y N. Liviatan (1992). The business cycle associated with exchange-rate-based stabilization. *The World Bank Economic Review*, 6, 279-305.

Lahiri, A. (2001). Exchange rate based stabilization under real frictions: The role of endogenous labor supply, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, 1157-1177.

Matsuyama, K. (1991). Devaluation: On exchange-rate stabilization, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 7-26.

Mendoza, E. G. y M. Uribe (1998). *The business cycles of currency speculations: A revision of a Mundellian framework*, International Finance Discussion Paper, núm. 617, Board of Governors of The Federal Reserve System.

—— (1996). *The syndrome of exchange-rate-based stabilization and uncertain duration of currency pegs*, International Finance Discussion Paper, núm. 548, Board of Governors of The Federal Reserve System.

Press, W. H., *et al.* (1992). Numerical recipes in C: The art of scientific computing, 2a. ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Rebelo, S. y C. A. Végh (1995). *Real effects of exchange rate based stabilization: An analysis of competing theories*, WP, 5197, NBER.

Reinhart, C. M. y C. A. Végh (1995). Nominal interest rates, consumption booms and lack of credibility: A quantitative examination, *Journal of Development Economics*, 46, 357-378.

—— (1993). *Intertemporal consumption substitution and inflation stabilization: An empirical investigation*, IMF, Washington (mimeo).

Ripley, B. D. (1987). *Stochastic simulation*, Wiley, Nueva York.

Rodríguez, C. A. (1982). The Argentine stabilization plan of December 20th, *World Development*, 10, 801-811.

Roldos, C. A. (1995). Supply-side effects of disinflation programs, *International Monetary Fund Staff Papers*, 42, 158-183.

Uribe, M. (1997). Exchange-rate-based inflation stabilization: The initial real effects of credible plans, *Journal of Monetary Economics*, 39, 197-221.

Végh, C. A. (1992). Stopping high inflation: An analytical overview, *International Monetary Fund Staff Papers*, 39, 626-695.

Venegas Martínez, F. (2001). Temporary stabilization: A stochastic analysis, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, 1429-1449.

—— (2000a). On consumption, investment, and risk, *Economía Mexicana*, 9, 227-244.

—— (2000b). Utility, learning, and stabilization, *Gaceta de Economía*, 10, 153-169.

—— y B. González-Aréchiga (2000). Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano, *Momento Económico*, 111, 20-27.

Apéndice A

En este apéndice se establecen sin demostración[3] dos resultados útiles en el desarrollo del presente trabajo:

1) El lema de Itô para procesos combinados de difusión y saltos de Poisson, el cual puede ser enunciado de la siguiente manera. Dada la ecuación diferencial estocástica lineal y homogénea

$$\mathrm{d}x_t = x_t(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z_t + \eta \mathrm{d}q_t), \qquad z_t \sim \mathcal{N}(0,t), \qquad q_t \sim \mathcal{P}(\lambda t). \tag{A.1}$$

y una función $g(x_t)$ continua y dos veces diferenciable, entonces la diferencial estocástica de $g(x_t)$ está determinada por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g(x_t) &= [g_x(x_t)\mu x_t + \tfrac{1}{2} g_{xx}(x_t)\sigma^2 x_t^2]\mathrm{d}t \\ &+ g_x(x_t)\sigma x_t \mathrm{d}z_t + [g(x_t(1+\eta)) - g(x_t)]\mathrm{d}q_t. \end{aligned} \tag{A.2}$$

2) La solución a la ecuación (A.1) está dada por

$$x_t = x_0 \exp\left\{(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t \mathrm{d}z_u + \log(1+\eta)\int_0^t \mathrm{d}q_u\right\}. \tag{A.3}$$

Es importante tener presente, al usar (A.3), que para $t \geq 0$ las propiedades para z_t y q_t son:

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t \mathrm{d}z_u\right] = 0, \;\; \mathrm{E}\left[\left(\int_0^t \mathrm{d}z_u\right)^2\right] = \int_0^t du = t, \;\; \text{y} \;\; \mathrm{E}\left[\int_0^t \mathrm{d}q_u\right] = \lambda t.$$

Apéndice B

En este apéndice se resuelve la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden no homogénea, la cual aparece en la ecuación (20). Sea $H = H(\tau)$ y considérese la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea del tipo de Euler-Cauchy

[3] Ver Gihman y Skorohod (1972, cap. 2).

$$\tau^2 H'' + \frac{2\bar{r}}{\sigma^2}\tau H' - \frac{2r}{\sigma^2}H = -\frac{2}{\sigma^2}\,\mathrm{iog}(\tau) + \frac{2}{r\sigma^2}\tau, \tag{B.1}$$

donde r y σ son constantes positivas. A continuación, la ecuación (B.1) se transforma en una ecuación diferencial con coeficientes constantes, para ello se aplica el método de Euler en el que se utiliza el siguiente cambio de variable $\tau = e^t$. Así, $t = \log(\tau)$,

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{B.2}$$

y

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial H}{\partial t}\right). \tag{B.3}$$

Después de sustituir las ecuaciones (B.2) y (B.3) en la ecuación (B.1), se obtiene

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \left(\frac{2\bar{r}}{\sigma^2} - 1\right)\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{2r}{\sigma^2}H = -\frac{2}{\sigma^2}t + \frac{2}{r\sigma^2}e^t. \tag{B.4}$$

La solución general es de la forma:

$$H(t) = H_c(t) + H_p(t), \tag{B.5}$$

donde H_c es la solución complementaria asociada a la ecuación homogénea y H_p es una solución particular de la ecuación no homogénea. Para determinar H_c, se requiere resolver la siguiente ecuación característica:

$$\gamma^2 + \left(\frac{2\bar{r}}{\sigma^2} - 1\right)\gamma - \frac{2r}{\sigma^2} = 0.$$

De aquí que la solución complementaria es

$$H_c(t) = \delta_2 e^{\gamma_1 t} + \delta_3 e^{\gamma_2 t}, \tag{B.6}$$

donde las dos raíces están dadas por

$$\gamma_1 = \frac{4r}{(2\bar{r} - \sigma^2) + \sqrt{(2\bar{r} - \sigma^2)^2 + 8r\sigma^2}}$$

y

$$\gamma_2 = \frac{4r}{(2\bar{\tau} - \sigma^2) - \sqrt{(2\bar{\tau} - \sigma^2)^2 + 8r\sigma^2}}.$$

Enseguida se determina H_p, para ello se utiliza el método de coeficientes indeterminados. Se supone que la solución es de la forma:

$$H_p(t) = At + B + Cte^t. \tag{B.7}$$

Por lo tanto, $H_p'(t) = A + C(t+1)e^t$ y $H_p''(t) = C(t+2)e^t$. Después, se sustituye la ecuación (B.7) en la ecuación (B.4), lo cual conduce a

$$\left(\frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} - \frac{2r}{\sigma^2}\right) Cte^t + \left(1 + \frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2}\right) Ce^t - \frac{2r}{\sigma^2} At$$
$$+ \left(\frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} - \mathrm{i}\right) A - \frac{2r}{\sigma^2} B = -\frac{2}{\sigma^2} t + \frac{2}{r\sigma^2} e^t.$$

Al resolver término a término se tiene que los valores de A, B y C, están dados por

$$A = \frac{1}{r}, \qquad B = \frac{1}{2r^2}\left(2\bar{\tau} - \sigma^2\right), \qquad \text{y} \qquad C = \frac{2}{r(\sigma^2 + 2\bar{\tau})},$$

de donde para una solución particular se cumple que $\bar{\tau} = r$. Por lo tanto,

$$H_p(t) = \frac{1}{\bar{\tau}} t - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}^2} + \frac{1}{\bar{\tau}} + \frac{2}{\bar{\tau}(\sigma^2 + 2\bar{\tau})} te^t. \tag{B.8}$$

Al sustituir las ecuaciones (B.6) y (B.8) en la ecuación (B.5) se tiene que

$$H(t) = \delta_2 e^{\gamma_1 t} + \delta_3 e^{\gamma_2 t} + \frac{1}{\bar{\tau}} t - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}^2} + \frac{1}{\bar{\tau}} + \frac{2}{\bar{\tau}(\sigma^2 + 2\bar{\tau})} te^t.$$

Como $\tau = e^t$, la solución general de la ecuación (B.1), en términos de τ, está dada por

$$H(\tau) = \delta_2 \tau^{\gamma_1} + \delta_3 \tau^{\gamma_2} + \frac{1}{\bar{\tau}} \log(\tau)$$

$$\left(1 + \frac{2}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}}\tau\right) + \frac{1}{\bar{\tau}}\left(1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}}\right). \tag{B.9}$$

Los valores de δ_2 y δ_3 que satisfacen las condiciones iniciales $H(\tau_0) = H'(\tau_0) = 0$ son

$$\delta_2 = \frac{\tau_0^{-\gamma_1}}{\bar{\tau}(\gamma_1 - \gamma_2)}\left[\gamma_2\left(\log(\tau_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{2\tau_0}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}}\left(1 + \log(\tau_0)(1 - \gamma_2)\right) + 1\right]$$

y

$$\delta_3 = \frac{\tau_0^{-\gamma_2}}{\bar{\tau}(\gamma_1 - \gamma_2)}\left[-\gamma_1\left(\log(\tau_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2\tau_0}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}}\left(1 + \log(\tau_0)(1 - \gamma_1)\right) + 1\right].$$